[illegible] का योगात्मक प्रमेय [illegible]

प्रमेय — 12.? :— दो घटनाओं A और B [illegible] होने की प्रायिकता दी जाती है :

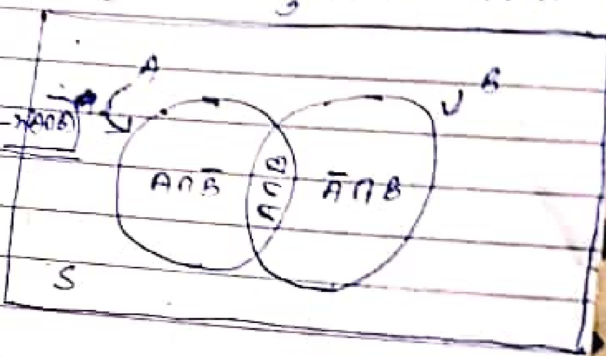
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{-----} (12.22)$$

उपपत्ति (सिद्धि) :— हम मान लें कि [illegible] का [illegible] S प्रतिदर्श [illegible] N प्रतिदर्श बिन्दुओं के साथ (निःशेष घटनाओं की संख्या) है। तब परिभाषा से

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A \cup B)}{N} \quad \text{----} (12.23)$$

जहाँ $n(A \cup B)$ घटित होने की संख्याओं (प्रतिदर्श बिन्दुओं) है घटना $(A \cup B)$ के अनुकूल,

चित्र 12.5 से, हम पाते हैं



$$P(A \cup B) = \frac{[n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + [n(B) - n(A \cap B)]}{N}$$

$$= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{N}$$

$$= \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} - \frac{N(A \cap B)}{N}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

टिप्पणी :— चूँकि $P(A \cap B) \geq 0$, हम (12.22) से पाते हैं :

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{----} (12.23a)$$

विशेष रूप से, दो घटनाओं A_1 और A_2 के लिए, हमें $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ ----(12.23b)

तीन घटनाओं A_1, A_2, A_3 के लिए, हमें

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P[(A_1 \cup A_2) \cup A_3]$$

$$\leq P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \quad \boxed{\text{(12.23a) से } A = A_1 \cup A_2 \text{ और } B = A_3 \text{ के लिए}}$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \quad \boxed{\text{(12.23b) से}} \quad \text{---} (12.23c)$$

इसी तरह आगे बढ़ते हुए, हमें सामान्य में है

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

12.8.1 प्रायिकता का योगात्मक प्रमेय परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए :—

अगर घटनायें A और B परस्पर असंयुक्त हैं i.e. अगर $A \cap B = \phi$ तब

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{N} = \frac{n(\phi)}{N} = 0, \quad \text{---} (*)$$

चूँकि $n(\phi) = 0$, चूँकि रिक्त समुच्चय कोई समुच्चय बिन्दु को धारण नहीं करती है। असंयुक्त घटना की स्थिति में, $A \cup B$ किसी भी घटना [illegible]

इसलिए कार्ययोग्य नियम संख्यात्मक प्रश्नों के लिए निम्न रूप से संक्षिप्त में
किसी घटना A के घटित होने की प्रायिकता है इसके सभी
परस्पर अपवर्जी कारणों $A_1, A_2 - - - A_n$ के घटित होने की प्रायिकता

मिश्रित प्रायिकता का प्रमेय या प्रायिकता का गुणन प्रमेय (Theorem of Compound Probability Or Multiplication of Probability)

प्रमेय 12.11 :– दो घटनायें A और B की एक साथ घटित होने की प्रायिकता दी जाती है:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \; ; \; P(A) \neq 0$$
या
$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) \; ; \; P(B) \neq 0$$

जहाँ $P(B/A)$ B के घटित होने की सप्रतिबंधी प्रायिकता इस प्रतिबंध के साथ कि A घटित हो चुकी है और $P(A/B)$ A के घटित होने की प्रायिकता है इस प्रतिबंध के साथ कि B घटित हो चुकी है।

दूसरे शब्दों में, दो घटनाओं A और B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता दो प्रायिकताओं का गुणनफल है; नाम से : प्रथम घटना की प्रायिकता का गुणा दूसरी घटना के सप्रतिबंधी प्रायिकता के साथ, दिया है कि प्रथम घटना पहले ही घटित हो चुकी है। हम A और B में से किसी घटना को पहली घटना ले सकते हैं।

उपपत्ति (Proof):– मान लें A और B घटनायें हैं प्रतिदर्श समष्टि S से संयुक्त एक दैव परीक्षण का निष्कर्षों की निःशेष संख्याओं के साथ (प्रतिदर्श बिन्दुओं) N, i.e. $n(S) = N$. तब परिभाषा से,

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \quad - - - - - - (12.29)$$

सप्रतिबंधी घटना A|B के लिए (i.e. A का घटित होना इस प्रतिबंध के साथ कि B घटित हो चुका है), अनुकूल परिणाम (प्रतिदर्श बिन्दुओं) निश्चित रूप से B के प्रतिदर्श बिन्दुओं से अलग होना चाहिये। दूसरे शब्दों में घटना A|B के लिए, प्रतिदर्श बिन्दु B है इसलिए

$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{}$

प्रमेय 12.8: दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता बराबर है उनकी व्यक्तिगत प्रायिकताओं के योग का। संकेत में, अपवर्जी घटनाओं A और B के लिए

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{-----} \quad (12.24)$$

(12.22) का सामान्यीकरण :- तीन घटनाओं A, B, C के लिए, उनमें से कम से कम एक के घटित होने की प्रायिकता दी जाती है :

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{n(A \cup B \cup C)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left[n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)\right]$$

$$= \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} + \frac{n(C)}{N} - \frac{n(A \cap B)}{N} - \frac{n(B \cap C)}{N} - \frac{n(A \cap C)}{N} + \frac{n(A \cap B \cap C)}{N}$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad \text{-----} \quad (12.25)$$

विशेष रूप से, अगर A, B और C परस्पर अपवर्जी (असंयुक्त) हैं, तब

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \phi \text{ और } A \cap B \cap C = \phi$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) = 0$$

इसलिए (12.25) में प्रतिस्थापित करने पर, किसी एक परस्पर अपवर्जी घटनाओं A, B और C के घटित होने की प्रायिकता बराबर है उनके व्यक्तिगत प्रायिकताओं के योगफल का और दी जाती है :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad \text{-----} \quad (12.26)$$

सामान्य तौर पर, अगर $A_1, A_2, \ldots A_n$ परस्पर अपवर्जी हैं तब

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \quad \text{-----} \quad (12.27)$$

i.e., किसी भी n परस्पर अपवर्जी घटनाओं $A_1, A_2, \ldots A_n$ के घटित होने की प्रायिकता बराबर है उनके व्यक्तिगत प्रायिकताओं के योगफल के।

महत्वपूर्ण टिप्पणी :- योगात्मक प्रमेय (12.27) का संख्यात्मक प्रश्नों में कैसे व्यवहार करें ? मान लें हम एक घटना A के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं। तब व्यवहारिक दृष्टिकोण से, हम बहुत सारी परस्पर अपवर्जी तरीकों (घटनाओं) को निकालना चाहते हैं जिसमें घटना A घटित हो सकता है। मान लें A का योग संभव निकलती $A_1, A_2, \ldots A_n$ हों। तब हम लिख सकते हैं

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n,$$

जहाँ $A_1, A_2, \ldots A_n$ परस्पर अपवर्जी हैं। इसलिए (12.27) का प्रयोग कर,

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$