9.9 सह-संबंध विश्लेषण Vs. प्रतीपगमन विश्लेषण

1. सह-संबंध का शाब्दिक अर्थ दो या अधिक चरों के बीच संबंध है जो सहानुभूति में परिवर्तित होती है इसलिए एक में परिवर्तन प्रेरित करती है दूसरे में संगत परिवर्तन को। दूसरी तरफ, प्रतीपगमन का अर्थ है पीछे लौटना या औसत की ओर लौटना और यह गणितीय माप है जो दो चरों के बीच औसत संबंध को अभिव्यक्त करती है।

2. दो चरों x और y के बीच सह-संबंध गुणांक 'r_{xy}' दो चरों के बीच रैखिक सम्बन्धों की दिशा और स्तर की माप है जो पारस्परिक है। यह सममितीय है, i.e., $r_{yx} = r_{xy}$ और यह निरर्थक है कि कौन x और y निर्भर चर है और कौन स्वतंत्र चर।

प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच फलनक संबंध को स्थापित करने का लक्ष्य करती है और तब इस संबंध का प्रयोग कर निर्भर चर का किसी स्वतंत्र चर के ~~लिए~~ दिये मान के लिए पूर्वानुमान या प्राक्कलन करती है। यह चर के प्रकृति को भी उजागर करती है i.e. कौन निर्भर चर है और कौन स्वतंत्र चर। प्रतीपगमन गुणांक x और y में सममितीय नहीं है i.e. $b_{yx} \neq b_{xy}$।

3. सहसंबंध की जरूरत नहीं अन्तर्गतनाधीन चरों के बीच कार्य-कारण संबंधों को मानने का। [विस्तार के लिए देखें 9.12 पृष्ठ --] यद्यपि प्रतीपगमन विश्लेषण स्पष्ट रूप से दो चरों के बीच कार्य-कारण संबंध निर्दिशित करती है। कार्य के संगत चर को स्वतंत्र चर और कारण के संगत चर को निर्भर चर लिया जाता है।

4. सह-संबंध गुणांक r_{xy} x और y के रैखिक संबंध की आपेक्षिक माप है और माप की इकाइयों से स्वतंत्र है। यह एक विशुद्ध संख्या है ±1 के बीच पड़ने वाली।

दूसरी तरफ, प्रतीपगमन गुणांक, b_{yx} और b_{xy} निमत माप हैं जो चर y(x) के मान में परिवर्तन, ~~इकाई~~ x(y) के मान में इकाई परिवर्तन के लिए होती है प्रदर्शित करती है। एक बार जब प्रतीपगमन वक्र का फलनक रूप जान लिया जाता है, निर्भर चर का मान प्रतिस्थापित कर हम स्वतंत्र चर का मान प्राप्त कर सकते हैं और यह मान चर के माप की इकाइयों में होंगे।

5. दो चरों के बीच असंवेदी (non-sense) सह-संबंध हो सकती है जो विशुद्ध संयोगवश हो सकता है जिसका कोई व्यवहारिक संदर्भ नहीं है i.e. जूते के आकार और व्यक्तियों के एक समूह की बुद्धि के बीच सह-संबंध।

6. सह-संबंध विश्लेषण सिर्फ चरों के बीच रैखिक संबंध तक सीमित है और इसलिए, इसका सीमित उपयोग है। प्रतीपगमन विश्लेषण का विस्तृत प्रयोग है क्योंकि यह चरों की रैखिक और साथ ही गैर-रैखिक संबंध का भी अध्ययन करता है।

ज्ञात करें :

(i) X और Y के बीच सह-संबंध का गुणांक

(ii) प्रमाप विचलन σ_x और σ_y

(iii) X का Y पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन

[दिल्ली विश्वविद्यालय बी॰ए॰ (अर्थशास्त्र ऑनर्स), 1996]

हल : सामान्य संकेताक्षरों में, हमें दिया गया है :

$b_{yx} = -1.6$; $b_{xy} = -0.4$; $S_{yx} = 3$ ---(1)

(i) सह-संबंध का गुणांक $r = r(x, y)$ दिया जाता है :

$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = (-1.6) \times (-0.4) = 0.64 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0.64} = \pm 0.8$

चूँकि प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक हैं, r भी ऋणात्मक है। ---(2)

$\therefore r = -0.8$

(ii) Y का X पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन दिया जाता है

$$S_{yx} = \sigma_y (1-r^2)^{1/2} \Rightarrow \sigma_y = \frac{S_{yx}}{(1-r^2)^{1/2}}$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{3}{\sqrt{1-0.64}} = \frac{3}{\sqrt{0.36}} = \frac{3}{0.6} = 5 \quad [\text{(1) और (2) से}] \quad ---(3)$$

$$\text{और, } b_{yx} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \sigma_x = \frac{r\sigma_y}{b_{yx}}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{(-0.8) \times 5}{-1.6} = 2.5 \quad \boxed{\text{(1), (2) और (3) से}}$$

~~(iii) X का~~

(iii) X का Y पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन दिया जाता है :

$$S_{xy} = \sigma_x (1-r^2)^{1/2} = 2.5(1-0.64)^{1/2} = 2.5 \times 0.6 = 1.5$$

9.8 एक द्विचर आवृत्ति तालिका के लिए प्रतीपगमन समीकरणें (Regression Equations for a Bivariate Frequency table)

एक द्विचर आवृत्ति तालिका के लिए सह-संबंध गुणांक की गणना, सामान्यतः सह-संबंध तालिका के नाम से जानी जाती है, अध्याय 8 में वर्णित की गई है। r का परिकलन संबद्ध होता है $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y की गणना से। चूँकि दो प्रतीपगमन की रेखाओं का समीकरण, यथा: y का x पर प्रतीपगमन की रेखा, और x पर y की हैं क्रमशः :

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}) = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}) = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

इन समीकरणों को प्राप्त करने का परिकलन मिला जुलाकर एक समान होगी। यद्यपि, यह यहाँ अवलोकित किया जा सकता है कि प्रतीपगमन गुणांक b_{yx} और b_{xy} मूल-बिंदु के परिवर्तन से स्वतंत्र हैं परन्तु मापक्रम से नहीं i.e.

अगर हम लें

$u = \frac{x-a}{h}$ और $v = \frac{y-b}{k}$; तब $b_{yx} = \frac{k}{h} b_{vu}$ और $b_{xy} = \frac{h}{k} b_{uv}$

इस बिन्दु को ध्यान में रखना होता है प्रतीपगमन गुणांकों का आकलन करने में। उपरोक्त तकनीक का वर्णन उदाहरणों की सहायता से करें।

✓ उदाहरण 9.17. निम्नलिखित तालिका नव विवाहित जोड़ों की उम्र (वर्षों में) पति और पत्नियों का देती है। दो प्रतीपगमन रेखायें ज्ञात करें। आकलित कीजिए (i) पति की उम्र जब पत्नी 20 की है और (ii) पत्नी की उम्र जब पति 30 का है।

पत्नी की उम्र	पति की उम्र 20-25	25-30	30-35	कुल
16-20	9	14	—	23
20-24	6	11	3	20
24-28	—	—	7	7
कुल	15	25	10	50

प्राक्कलनों का प्रमाप विभ्रम भी ज्ञात करें।

[दिल्ली विश्वविद्यालय बी.कॉम (आनर्स), 1997]

हल : मानें हम पतियों की उम्र (वर्षों में) चर X से और पत्नी की उम्र चर Y से द्योतित करें। मान लें x और y संगत वर्गों क्रमशः X और Y श्रेणियों के मध्य-मान को द्योतित करता है। अगर हम लें

$$u = \frac{x-A}{h} = \frac{x-27.5}{5} \; ; \; v = \frac{y-B}{k} = \frac{y-22}{4}$$

प्रतीपगमन समीकरणों के लिए परिकलन

		पति की उम्र →	20-25	25-30	30-35				
पत्नी की उम्र ↓	मध्य बिंदु (y)	मध्य बिंदु	22.5	27.5	32.5	f	fv	fv^2	fuv
		v ↓ u →	-1	0	1				
16-20	18	-1	9 $\boxed{9}$	14 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	23	-23	23	9
20-24	22	0	6 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	3 $\boxed{0}$	20	0	0	0
24-28	26	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	7 $\boxed{7}$	7	7	7	7
		f	15	25	10	N=50	$\Sigma fv = -16$	$\Sigma fv^2 = 30$	$\Sigma fuv = 16$
		fu	-15	0	10	$\Sigma fu = -5$			
		fu^2	15	0	10	$\Sigma fu^2 = 25$			
		fuv	9	0	7	$\Sigma fuv = 16$			

Contd.

(... 4)

... को प्रतीपगमन की रेखाओं की गणना के लिए तालिका पृष्ठ ... पर दी गई है

$\bar{u} = \frac{\Sigma fu}{N} = \frac{-5}{50} = -0.1$ | $\bar{x} = A + h\bar{u} = 27.5 + 5\times(-0.1) = 27.5 - 0.5 = 27$

$\bar{v} = \frac{\Sigma fv}{N} = \frac{-16}{50} = -0.32$ | $\bar{y} = B + k\bar{v} = 22 + 4\times(-0.32) = 22 - 1.28 = 20.72$

$b_{yx} = \frac{k}{h}\left[\frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)(\Sigma fv)}{N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2}\right]$

$= \frac{4}{5}\left[\frac{50\times16 - (-5)\times(-16)}{50\times25 - (-5)^2}\right]$

$= \frac{4}{5}\left[\frac{800 - 80}{1250 - 25}\right]$

$= \frac{4}{5}\times\frac{720}{1225} = 0.4702$

$b_{xy} = \frac{h}{k}\left[\frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)(\Sigma fv)}{N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2}\right]$

$= \frac{5}{4}\left[\frac{800 - 80}{50\times30 - (-16)^2}\right]$

$= \frac{5}{4}\times\frac{720}{1244} = 0.7235$

y का x पर प्रतीपगमन समीकरण

$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$

$\Rightarrow y - 20.72 = 0.4702(x - 27)$

$= 0.4702x - 12.6954$

$y = 0.4702x + 20.72 - 12.6954$

$= 0.4702x + 8.0246$

इसलिए, पत्नी (y) की सबसे संभावित उम्र जब पति (x) की उम्र 30 वर्ष है दी जाती है

$y = 0.4702\times30 + 8.0246$

$= 14.1060 + 8.0246$

$= 22.1306$

$= 22$ वर्ष (लगभग)

x का y पर प्रतीपगमन समीकरण

$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$

$\Rightarrow x - 27 = 0.7235(y - 20.72)$

$= 0.7235y - 14.991$

$\Rightarrow x = 0.7235y + 27.000 - 14.991$

$\Rightarrow x = 0.7235y + 12.009$

इसलिए, पति (x) की सबसे संभावित उम्र जब पत्नी (y) की उम्र 20 वर्ष है, दी जाती है:

$x = 0.7235\times20 + 12.009$

$= 14.470 + 12.009$

$= 26.479$

$= 26.5$ वर्ष (लगभग)

आकलन के प्रमाप विभ्रम की गणना

$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2} = \frac{5}{50}\sqrt{50\times25 - (-5)^2} = \frac{\sqrt{1225}}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$

$\sigma_y = \frac{k}{N}\sqrt{N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2} = \frac{4}{50}\sqrt{50\times30 - (-16)^2}$

$= \frac{4}{50}\times\sqrt{1244} = \frac{4}{50}\times35.27 = 2.82$

$r^2 = b_{yx}\cdot b_{xy} = 0.4702\times0.7235 = 0.34$

y के प्रमाप विभ्रम का प्रक्कलन (दिये x के लिए)

$S_{yx} = \sigma_y(1 - r^2)^{1/2} = 2.82(1 - 0.34)^{1/2}$

$= 2.82\times8.124$

$= 22.91$

x के प्रमाप ~~विचलन~~ विभ्रम का प्रक्कलन (दिये y के लिए)

$S_{xy} = \sigma_x(1 - r^2)^{1/2} = 3.5(1 - 0.34)^{1/2}$

$= 3.5\times8.124$

$= 28.434.$

Scanned with CamScanner

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y - y_{p})^2} = \sqrt{\frac{10.421}{10}} = \sqrt{1.421} = 1.02$$

उदाहरण 9.16. एक अज्ञात बर्बाद रिकार्ड में, एक द्विचर समंक (X,Y) से को प्रतीपगमन की रेखाओं के प्राक्कलन के लिए, निम्नलिखित परिणाम उपलब्ध थे :

Y का X पर प्रतीपगमन का गुणांक = −1.6

X का Y पर प्रतीपगमन का गुणांक = −0.4

Y का X पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन = 3