[illegible] के लिए [illegible] $A = \{1, 2, 3, 4\}$ [illegible] $B = \{3, 4, 5, 6\}$ [illegible]

दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ (intersection) $A \cap B$ है [illegible] उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ [illegible]

$A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$

[illegible] उदाहरण [illegible] $A \cap B = \{3, 4\}$

दो समुच्चय A और B असंयुक्त (disjoint) कहलाते हैं यदि [illegible] A और B में कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं है। [illegible] (disjoint sets) है [illegible] सर्वनिष्ठ (intersection) [illegible]

i.e. यदि $A \cap B = \phi$

एक समुच्चय A का [illegible] अर्थात् वह समुच्चय है जो [illegible] के उन अवयवों [illegible] से बना है [illegible] जो A के नहीं हैं परन्तु [illegible] सार्वत्रिक समुच्चय [illegible]

$\bar{A}$ या $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A\}$.

टिप्पणी :- स्पष्टतः A और B [illegible] असंयुक्त हैं [illegible] $A \cap B' = \phi$

ऐसे समुच्चय [illegible] A − B से [illegible] [illegible] परन्तु B में नहीं [illegible]

$A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\}$

इसे ऐसे भी लिखा जाता है

$A - B = \{x : x \in (A \cap B')\}$

क्योंकि $A - B$ दर्शाता है $A \cap B'$ को।

समुच्चय सिद्धान्त के नियम (laws of Set theory) :-

अगर A, B और C उपसमुच्चय हैं सार्वत्रिक समुच्चय S का, तब निम्नलिखित नियम लागू होते हैं

क्रम-विनिमेय नियम (Commutative laws)

$A \cup B = B \cup A$ {सम्मिलन (union) के लिए}

$A \cap B = B \cap A$ {सर्वनिष्ठ (intersection) के लिए}

साहचर्य नियम (Associative laws)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ {सम्मिलन के लिए}

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ {सर्वनिष्ठ के लिए}

Scanned with CamScanner

(2)

एक पासों की उछाल में, निःशेष स्थितियों की संख्या 6 है, चूँकि, एक पासा पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में कोई एक आ सकती है। अगर दो पासे फेंके जाते हैं संभावित परिणाम हैं:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(5.5)	(6,6)

इस 36 क्रमिक जोड़े जहाँ जोड़ा (i, j) का अर्थ i संख्या पहले पासे पर और j संख्या दूसरे पासे पर, i और j दोनों 1 से 6 तक मान लेते हैं। अतः, दो पासों की उछाल की स्थिति में निःशेषी स्थिति की संख्या $36 = 6^2$ है। इस तरह 3 पासों की उछाल के लिए, निःशेषी स्थितियों की संख्या होगी $216 = 6^3$, और n पासों के लिए वे होंगी 6^n।

~~अगर r पत्ते खींचे जाते हैं ताश की गड्डी से~~

अगर r पत्ते खींचे जाते हैं ताश की गड्डी से, निःशेषी स्थितियों की संख्या है $^nC_r = \binom{n}{r}$, चूँकि r पत्ते n पत्तों से $\binom{n}{r}$ तरीके से खींचे जा सकते हैं।

अनुकूल स्थितियाँ या घटनायें (Favourable Cases or Events):

एक दैव प्रयोग के निष्कर्षों की संख्या जो अपरिहार्य परिणाम हैं किसी घटना के घटित होने का तो वे घटनाओं के अनुकूल कहलाती हैं। उदाहरण के लिए,

(i) दो सिक्कों की उछाल में, स्थितियों की संख्या एक घटना के अनुकूल 'ठीक एक चित्त' 2 है. उदा. HT, TH और दो चित्त पाने की एक है उदा. HH.

(ii) एक ताश की गड्डी से एक ताश खींचने में, एक चिड़िया का पत्ता की अनुकूल स्थिति 13 है ~~और~~ काला पान के बादशाह पाने की केवल 1 है।

परस्पर अपवर्जी घटनायें या स्थितियाँ (Mutually Exclusive Events or Cases)

दो या अधिक घटनायें आपस में परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं अगर उनमें से किसी एक के घटित होने पर बाकी दूसरे की घटने की बहिष्कृत हो जाती है उसी प्रयोग में। उदाहरण के लिए, एक सिक्के की उछाल में, घटनायें 'चित्त' और 'पट' परस्पर अपवर्जी हैं क्योंकि अगर चित्त आता है हम पट नहीं पा सकते और अगर पट आता है हम चित्त नहीं पा सकते हैं। उसी तरह, एक पासे की उछाल में, 6 फलक संख्यायें 1, 2, 3, 4, 5 और 6 परस्पर अपवर्जी हैं। इस तरह, घटनायें परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं जब उनमें दो या अधिक एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं।

होती है, ~~जिसके~~ परिणाम स्पष्ट नहीं है परन्तु विभिन्न संभाव्य संभावनाओं में से एक है।

परीक्षण और घटना (Trial and Event) :- एक दैव प्रयोग के परीक्षण कहलाता है और निष्कर्ष या निष्कर्षों का जोड़ घटना कहलाता है उदाहरण के लिए,

(i) अगर एक सिक्का बार-बार उछाला जाता है, परिणाम एकल है। हम दोनों फलकों में से कुछ भी पा सकते हैं, चित्त या पट। एक सिक्के का उछाल एक दैव ~~परीक्षण~~ प्रयोग है या निष्कर्ष और चित्त या पट घटना है।

(ii) इसी तरह से, एक ~~सिक्के~~ पासे को उछालना एक परीक्षण है और 1, 2... फलक घटना है, या एक विषम संख्या घटना है; या एक संख्या जो 4 से या उससे कम घटनायें हैं।

(iii) एक पात्र से दो गेंदें निकालने एक पात्र है जिसमें 'a' लाल और 'b' उजला गेंद है परीक्षण है और दोनों लाल गेंद, या दोनों उजला गेंद या एक लाल और एक उजला गेंद घटनायें हैं।

घटना सरल कही जाती है अगर यह परीक्षण के अकेले संभावित परिणाम के, संगत है ~~या परीक्षण~~ नहीं तो यह मिश्र (Compound) या संयुक्त (संश्लिष्ट, Composite) कहलाती है। इस तरह, एक एकल पासे की उछाल '5' पाने की घटना एक सरल घटना है परन्तु 'सम संख्या पाने' की घटना एक संयुक्त घटना है।

निःशेषी स्थिति (Exhaustive Cases) :- एक दैव प्रयोग के संभाव्य परिणामों की कुल संख्या परीक्षण के लिए निःशेषी स्थिति कहलाती है। इस तरह, एक एकल सिक्के की उछाल में, हम चित्त (H) या पट (T) पा सकते हैं। इसलिए निःशेषी स्थिति की संख्या 2 है, viz. (H, T)। अगर दो सिक्के उछाले जाते हैं, विभिन्न संभावनायें हैं HH, HT, TH, TT जहाँ HT का अर्थ चित्त पहले सिक्के पर और पट दूसरे सिक्के पर, और TH का अर्थ पट पहले सिक्के पर और चित्त दूसरे सिक्के पर और इसी तरह आगे। इसलिए, दो सिक्कों के उछाल की ~~स्थिति में~~, निःशेषी स्थितियों की संख्या 4 है i.e. 2^2। इसी तरह से, तीन सिक्कों की उछाल में ~~परिणामों~~ संभाव्य परिणामों की संख्या है:

$$(H,T) \times (H,T) \times (H,T)$$
$$= (HH, HT, TH, TT) \times (H,T)$$
$$= HHH, HTH, THH, TTH, HHT, HTT, THT, TTT$$

इसलिए, 3 सिक्कों की उछाल की स्थिति में, निःशेषी स्थितियों की संख्या 8 है $= 2^3$। सामान्यतया, n सिक्कों की उछाल में, निःशेषी स्थितियों की संख्या 2^n है।

समप्रायिक स्थितियाँ (Equally Likely Cases) :- समप्रायिक या समसंभाव्य कहलाती हैं अगर उनमें किसी को किसी दूसरे से अधिमान्यता नहीं है अर्थात विचाराधीन घटनाओं के होने की सम्भावना समान है। इस तरह, एक सिक्के (पासे) की उछाल के लिए, H, T (अथवा 1, 2, 3, 4, 5, 6) समप्रायिक हैं अगर सिक्का (पासा) (unbiased) है।

स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events) :- घटनाएँ स्वतंत्र कही जाती हैं अगर उनमें से किसी एक की घटना को प्रभावित नहीं करती है या दूसरों में किसी एक के घटित होने की सम्भावना करते हैं। उदाहरण के लिए,

(i) एक पासे की बार-बार उछाल में, घटना '5' की पहली उछाल में प्राप्त करना स्वतंत्र है दूसरे, तीसरे या उत्तरवर्ती उछालों में प्राप्त...

(ii) एक ताश की गड्डी से ताश खींचने में, दूसरे बार पत्ता खींचना स्वतंत्र है पहली बार पत्ता खींचने पर। यद्यपि, अगर पहले खींचा गया है बदल दिया जाता है दूसरे ताश को खींचने से पहले, तब दूसरे खींचने का परिणाम पहली बार खींचे जाने से स्वतंत्र होगी।

इसी तरह, एक पात्र से गेंदों को निकालना स्वतंत्र घटना देता खींचना पुनर्स्थापना के साथ है। अगर पहले के ~~क~~ खींचों में निकाले गेंद पुनर्स्थापित नहीं किये जाते हैं, तब परिणामी खींच स्वतंत्र नहीं।

12.4. गणितीय पूर्वांग / Mathematical Preliminaries

12.4.1 समुच्चय सिद्धान्त (Set Theory) :-

~~एक~~ एक समुच्चय सुपरिभाषित ~~एक~~ संकलन या ~~समष्टि का एक सुपरिभाषित वस्तुओं~~ संकलन या समष्टि है वस्तुओं का, जिसे कुछ गुणों और एक सुपरिभाषित निर्देशित के अनुसार ~~निर्देशित है~~। उदाहरण के लिए, अंग्रेजी वर्णमाला में अक्षर स्वर (vowels) या व्यंजन (consonant) अंग्रेजी वर्णमाला के; भारत प्रधानमंत्री; दिल्ली के कॉलेज इत्यादि सभी ~~स~~ समुच्चय हैं। वस्तुएँ जो समुच्चय बनाती हैं इसके अवयव कहलाते हैं। समुच्चय अधिकतर बड़े अक्षरों से निर्देशित होती है, viz. A, B, C इत्यादि। हमलोग निम्नलिखित संकेत का प्रयोग करेंगे।

$\in$ में है (Belongs to) ; $\notin$ में नहीं है (does not belong to) :

$\subset$ ~~अंत~~ अन्तर्विष्ट है ; $\supset$ अन्तर्विष्ट करता है।

अगर x अवयव है समुच्चय A का हम लिखते हैं $x \in A$ और अगर x अवयव नहीं है समुच्चय A का हम लिखते हैं $x \notin A$। एक समुच्चय लिखी जाती है इसके अवयवों को मध्य कोष्ठक के बीच लिखकर। उदाहरण के लिए

A = पहले 10 प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
= {x : x ∈ N, x ≤ 10}

B = विषम धनात्मक संख्याओं का समुच्चय
= (1, 3, 5, 7, ...)
= {x : x = 2n+1, n ∈ I⁺}

रिक्त समुच्चय (Null Set) :- एक समुच्चय जिसमें कोई अवयव नहीं होता है एक रिक्त या खाली समुच्चय कहलाता है। यह संकेत φ (फाई) से सूचित होता है। उदाहरण के लिए, अगर दो पासे उछाले जाते हैं और A है दोनों पासों पर अंकों का समुच्चय ताकि उनका योगफल 12 से अधिक है, तब A रिक्त समुच्चय है। और

$$B = \{x ; x^2+1 = 0, x \text{ वास्तविक}\} = \phi$$

चूँकि समीकरण का हल $x^2+1=0$, हमेशा काल्पनिक है।

उप-समुच्चय (Subset) :- समुच्चय A कहा जाता है उपयुक्त उपसमुच्चय B का अगर A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है और B का कम से कम एक अवयव है जो A का अवयव नहीं है और हम लिखते हैं $A \subset B$.
अगर बाद का प्रतिबंध हटा लिया जाता है, तब A को B का उपसमुच्चय कहा जाता है और हम लिखते हैं $A \subseteq B$.

दो समुच्चयों की समता (Equality of two sets) :- दो समुच्चय A और B बराबर कहे जाते हैं, अगर A का प्रत्येक अवयव B का अवयव है और अगर B का प्रत्येक अवयव A का अवयव है, अभिव्यक्ति रूप में

$$A = B \text{ अगर } x \in A \Rightarrow x \in B \text{ और } x \in B \Rightarrow x \in A$$

टिप्पणियाँ :- 1. प्रत्येक समुच्चय अपने आप का उप-समुच्चय है, i.e. $A \subset A$.
2. रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उप-समुच्चय है, i.e. $\phi \subset A$.

~~सार्वत्रिक~~ (Universal Set)
समष्टीय समुच्चय :- किसी समस्या में, निश्चित संदर्भ के अन्तर्गत सभी सीमांत विशेष समुच्चयों को समुच्चय, जिसको सभी समुच्चय विचाराधीन उपसमुच्चय हैं, समष्टीय समुच्चय कहलाते हैं। हम इसे S से द्योतित करेंगे। समष्टि समुच्चय स्थिति-स्थिति में परिवर्तनशील हैं।

समुच्चय का बीजगणित (Algebra of Sets)

दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन (Union), $A \cup B$ से द्योतित, परिभाषित होती है अवयवों के समुच्चय के जो या तो A में है या B में या दोनों में। संकेत रूप में हम लिखते हैं:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ या } x \in B\}$$

~~34 516, 34 की स्थिति में~~ $A \cap B = \{3, 4\}$