प्रमेय 12.2. n भिन्न (पृथक) वस्तुओं के ... पुनरावृत्ति के साथ r एक बार में लिया जाता है :

$$^nP_r = n^r \quad \text{------} \quad (12.6)$$

विशेष रूप से $^nP_n = n^n$

प्रमेय 12.3: n विभिन्न वस्तुओं के क्रमचय की संख्या एक वृत्त के ... ली जाती है $(n-1)!$

प्रमेय 12.4 (वस्तुओं का क्रमचय सभी पृथक नहीं): → n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या सभी एक बार लेने पर, जब n_1 वस्तुएँ एक जैसी एक ... की हैं, n_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की हैं ---- n_k वस्तुएँ एक जैसी k_{th} ... की हैं दी जाती है

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} \quad \text{------} \quad (12.7)$$

उदाहरण के लिए, शब्द ALLAHABAD के शब्दों में कुल शब्दों का ... सभी एक बार लेने पर दी जाती है;

$$\frac{9!}{4!\,2!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5}{2} = 7560$$

क्योंकि इस शब्द में, 9 शब्द हैं जिसमें 4 एक प्रकार की हैं, i.e. A; 2 दूसरे प्रकार की हैं i.e. L और दूसरे सभी भिन्न एक बार आते हैं। और ...

प्रमेय 12.5 (गिनने के प्राथमिक नियम) :— अगर एक क्रिया P भिन्न तरीकों से क्रियान्वित की जाती है और दूसरी क्रिया q भिन्न तरीकों से क्रियान्वित की जा सकती है, तब जब दोनों क्रियाएँ एक साथ जुड़ी हुई हैं तो यह P×q तरीकों से क्रियान्वित हो सकती है। परिणाम को सामान्यीकृत किया जा सकता है दो क्रियाओं से अधिक के लिए।

उदाहरण के लिए, अगर स्थान A से स्थान B से पाँच मार्ग हैं, तब कुल रास्तों की संख्या लौटने के लिए (i.e. A से B जाने का और B से A लौटने का) है $5\times5=25$, चूंकि एक व्यक्ति A से B 5 तरीकों से जा सकता है और लौट सकता है B से A पाँच तरीकों से और कोई भी जाने के मार्ग को किसी भी लौटने के मार्ग से जोड़ा जा सकता है।

संचय (परिभाषा) :— n विभिन्न वस्तुओं का संचय एक समय में r लेकर, द्योतित होती है ^nC_r या $\binom{n}{r}$ द्वारा, r वस्तुओं का चुनाव है n वस्तुओं से, व्यवस्थापन के क्रम का बिना ख्याल किये।

प्रमेय 12.6. ~~विभिन्न~~ n विभिन्न वस्तुओं के भिन्न संचयों की संख्या r एक समय में लेकर, बिना पुनरावृत्ति के है,

$$^nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!};\quad r \le n \quad \text{------} \quad (12.8)$$

$$= \frac{^nP_r}{r!} \quad [(12.5) \text{ का प्रयोग कर}] \quad \text{------} \quad (12.8a)$$

विशेष रूप से, n विभिन्न वस्तुओं के क्रमचयों की कुल संख्या, सभी को एक बार लेने पर दिया जाता है :

$$ {}^nP_n = n(n-1)(n-2) \cdots 1 \quad [\text{में } r = n \text{ (2.1) से}] $$

$$ \Rightarrow {}^nP_n = n! \quad \text{------} \quad (2.2) $$

टिप्पणियाँ 1. : क्रमगुणित संकेतचार (Factorial notation) :-
प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल, i.e. 1, 2, 3 ---- n क्रमगुणित कहलाता है n या n-क्रमगुणित और लिखा जाता है n! या $\lfloor n$ इस तरह,

$$ n! = \lfloor n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \quad \text{----} \quad (2.3) $$

पुनः लिखने पर, हमें

$$ n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 $$

$$ \Rightarrow n! = n[(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1] $$

$$ \Rightarrow n! = n(n-1)! \quad \text{------} \quad (2.4) $$

(2.4) का पुनः आवृत्त प्रयोग देता है :

$$ n! = n(n-1)(n-2)! $$

$$ = n(n-1)(n-2)(n-3)! $$

और इसी तरह आगे। उदाहरण के लिए, हमें :

$$ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 $$

$$ = 5 \times 4! $$

$$ = 5 \times 4 \times 3! $$

और इसी तरह आगे।

प्रथानुसार, हम लेते हैं 0! = 1, i.e. 0 क्रमगुणित ...

2. हमें,

$$ {}^nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) $$

$$ = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} $$

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{------} \quad (2.5) $$

ऐसा रूप जो ज्यादा ... है और ... के और ... उद्देश्यों के लिए प्रयोग करते हैं।

पूरक का नियम निरूपित किया जा सकता है n समुच्चय तक।
अगर $A_i \subset S$; $i = 1, 2 \ldots n$ तब

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i^c) \quad \text{और} \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i^c)$$

वर्गसम नियम (Idempotency law)

$$A \cup A = A \quad \text{और} \quad A \cap A = A$$

12.4.2 क्रमचय एवं संचय (Permutation and Combination)

क्रमसंचय शब्द का और शब्द संचय का अर्थ, सामान्य भाषा में अर्थ होता है व्यवस्था, समूह या चुनाव है। हम तीन अक्षर A, B और C पर विचार करें। इन तीन अक्षरों का संचय दो (के क्रम) लेकर होगा AB, BC, CA, BA, CB और AC i.e. कुल में 6 जबकि क्रमसंचय इन तीन अक्षरों का दो को एक साथ लेकर होगा AB, BC और CA i.e. 3। यह नोट किया जाना चाहिए कि संचय में, अवयवों का क्रम (इस केस अक्षर) निरर्थक है i.e. AB और BA एक ही संचय देता है परन्तु भिन्न क्रम है। उसी तरह, 4 अक्षरों की स्थिति में A, B, C, D, कुल संचयों में तीन को एक साथ लेकर है: ABC, ABD, ACD, BCD i.e. कुल में 4। यद्यपि, इनमें से प्रत्येक संचय छः विभिन्न ~~क्रम देते~~ हैं। व्यवस्थापन है। उदाहरण के लिए, संचय ABC का विभिन्न व्यवस्थापन है: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA।

इसलिए, क्रमसंचयों की कुल संख्या (व्यवस्थापन) 4 अक्षरों का 3 एक साथ लेकर है $4 \times 6 = 24$.

क्रमचय (परिभाषा) :- n विभिन्न वस्तुओं का क्रमचय r बार में लेकर, द्योतित है ${}^nP_r$ द्वारा एक क्रमबद्ध संयोजन है n वस्तुओं को r वस्तुओं का।

अब हम व्याख्या करेंगे, और उपपत्ति (proof) के, क्रमचय कुछ महत्वपूर्ण परिणाम प्रमेयों के रूप में।

प्रमेय 12.1 विभिन्न क्रमचयों की संख्या भिन्न वस्तुओं n से r एक बार ~~लेकर~~ और पुनरावृत्ति के लेकर है

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1) \quad \text{---(12}$$

i.e. यह r कारकों का सतत गुणन है जो n से शुरू होता है और इकाई है अन्तर।

उदाहरण के लिए,

${}^3P_2 = 3 \times 2 = 6$; ${}^4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$; और इसी तरह आगे

बंटन नियम (Distributive laws):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

इसलिए सर्वनिष्ठ बंटित है सम्मिलन के सापेक्ष और सम्मिलन बंटित है सर्वनिष्ठ के सापेक्ष।

अंतर नियम (Difference laws) :-

$$A - B = A \cap \overline{B}$$
$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

पूरक नियम (Complementary laws)

$\cancel{(A \cup B)^c}$ $A \cup A^c = S$; $A \cap A^c = \phi$

$A \cup S = S$; $(\because A \subset S)$; $A \cap S = A$

$A \cup \phi = A$; $A \cap \phi = \phi$

पूरक का डि-मार्गन नियम (De-Morgan's laws of Complementation)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

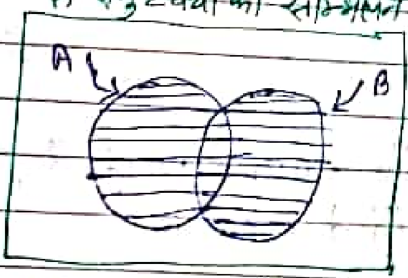
i.e. सम्मिलन का पूरक बराबर है पूरक के सर्वनिष्ठ का और

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

i.e. सर्वनिष्ठ का पूरक बराबर है पूरक के सम्मिलन के

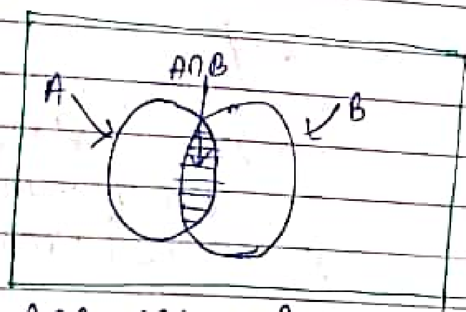
समुच्चय पर विभिन्न प्रक्रिया जैसे, सम्मिलन, सर्वनिष्ठ, अंतर और पूरक को चित्र से अभिव्यक्त की जा सकती है वेन आरेख (Venn diagram) नीचे दिये गये हैं।

दो समुच्चयों का सम्मिलन



$A \cup B = B \cup A =$ धारी वाला क्षेत्र

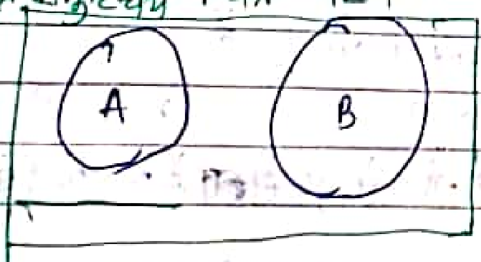
चित्र - 12.1



$A \cap B = B \cap A =$ धारी वाला क्षेत्र

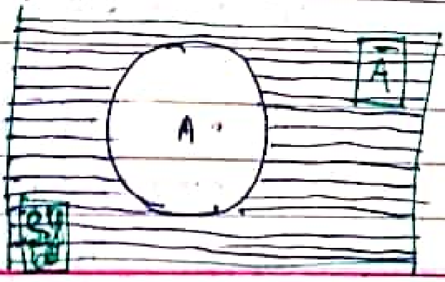
चित्र - 12.2

असंयुक्त समुच्चय



$A \cap B = \phi$

चित्र - 12.3



$\overline{A} = S - A =$ धारीदार क्षेत्र

चित्र - 12.4