इस तरह, इच्छापूर्वक कहें तो एक घटना परिभाषित की जा सकती है समष्टि का और खाली उप-समुच्चय भी। सभी घटना परिभाषित की जा सकती हैं असंयुक्त सम्मिलन का S के अकेले बिन्दु उपसमुच्चयों असंयुक्त सम्मिलन S के कुछ उप समुच्चयों का। चूंकि घटनाएँ कुछ हैं परन्तु समुच्चय हैं, समुच्चयों का बीजगणित का प्रयोग हो सकता उनसे कार्य होने के लिए।

दो घटनाएँ A और B असंयुक्त या परस्पर अपवर्जी कही जाती हैं अगर वे एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं i.e. अगर उनका प्रतिच्छेदन (intersection) एक रिक्त समुच्चय है। इस तरह अगर A और B असंयुक्त घटनाएँ हैं, तब

$$A \cap B = \phi \implies P(A \cap B) = P(\phi) = 0 \quad \text{---} (12.1)$$

इस तरह $P(A \cap B) = 0$, हमें एक मानक देती है परीक्षा के लिए अगर A और B परस्पर अपवर्जी होते हैं।

Axiomatic Probability

मान्यताओं पर आधारित प्रायिकता (परिभाषा) :– एक यादृच्छया प्रयोगों के दिये प्रतिदर्श समष्टि के लिए, किसी घटना A के घटित होने की प्रायिकता परिभाषित की जाती है समुच्चय फलन P(A) से जो निम्नलिखित मान्यताओं को संतुष्ट करती है.

मान्यता (Axiom) 1. P(A) परिभाषित होती है, वास्तविक है और अऋणात्मक i.e.

$$P(A) \geq 0 \text{ (अऋणात्मक की मान्यता)} \quad \text{---} (12.19a)$$

मान्यता 2. $P(S) = 1$ (निश्चितता की मान्यता) ---- (12.20)

मान्यता 3. अगर $A_1, A_2 \ldots A_n$ कोई S के असंयुक्त घटनाओं का परिमित या अपरिमित (finite or infinite) क्रम है, तब

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \text{ या}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (योगात्मकता की मान्यता)} \quad \text{---} (12.21)$$

घटनायें समुच्चय जैसे — प्रायिकता पदों की शब्दावली

[Events as sets — Glossary of Probability Terms]

अगर A और B दो घटनायें हैं तब :

$A \cup B$: एक घटना जो प्रदर्शित करती है घटनाओं A और B में कम से कम एक का घटित होना (i.e. या तो A घटता है या B घटता है या दोनों घटते हैं)

$A \cap B$: एक घटना जो प्रदर्शित करती है दोनों घटनाओं A और B के एक साथ घटित होने को

$\bar{A}$: A नहीं घटता है

$\bar{A} \cap \bar{B}$: ना तो A ना ही B घटता है i.e. A और B में कोई नहीं घटता है

$\bar{A} \cap B$: A नहीं घटता है परन्तु B घटता है

16.? मान्यताओं पर आधारित प्रायिकता (Axiomatic ...)

आधुनिक प्रायिकता का सिद्धान्त मान्यताओं पर आधारित जिसको 1933 में ए. एन. कोल्मोगोरोव ने परिभाषित किया। कोल्मोगोरोव ने प्रायिकता के सिद्धान्त को प्रदान की और उनकी छोटी पुस्तक ~~प्रायिकता का आधार~~, Foundation of Probability, 1933 में प्रकाशित, प्रायिकता का परिचय एक समुच्चय फलन के रूप में करती है और एक आधुनिक, मानी जाती है। मान्यता प्रधान अभिगमन में, कुछ ~~शब्द~~, कुछ ~~अपरिभाषित~~ शब्द जाती है और कुछ गुण या अभिधारणायें, जो मान्यताएं मानी जाती हैं, परिभाषित की जाती है और इन मान्यताओं से पूरा सिद्धान्त विकसित किया गया है जिसका तर्क ~~आगम~~ (Logical deduction) है। मान्यताओं वाली प्रायिकता की परिभाषा प्रायिकता के दोनों क्लासिकल और ~~सांख्यिकीय~~ परिभाषाओं को शामिल करते हैं और साथ ही दोनों की कमियों से मुक्त है। प्रायिकता की मान्यताओं पर आधारित परिभाषा के पहले, हम कुछ अवधारणाओं का वर्णन करेंगे, जो इसमें प्रयुक्त हुई हैं।

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space): एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभव निष्कर्षों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कही जाती है और S द्वारा द्योतित होती है। दूसरे शब्दों में, प्रतिदर्श समष्टि यादृच्छिक प्रयोग के सभी निःशेषी स्थितियों का समुच्चय है। प्रयोग का निष्कर्ष प्रतिदर्श बिन्दु (Sample points) कही जाती है। गणितीय रूप में, अगर $e_1, e_2 \cdots e_n$ एक यादृच्छिक प्रयोग के परस्पर अपवर्जी संभव निष्कर्ष हैं, तब समुच्चय $S = \{e_1, e_2 \cdots\cdots e_n\}$ प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कही जाती है। S के तत्व निम्नलिखित गुणों को रखती है

(i) e_i का प्रत्येक $(i = 1, 2 \cdots n)$ प्रयोग का निष्कर्ष है।

(ii) प्रयोग की किसी पुनरावृत्ति का परिणाम है e_i के संगत सिर्फ और सिर्फ एक e_i का होना।

टिप्पणी :- हमलोग $n(S)$ लिखेंगे तत्वों की संख्या को द्योतित करने के लिए i.e. S में प्रतिदर्श बिन्दुएँ।

दृष्टांत 1. अगर एक सिक्का यदृच्छया उछाली जाती है, प्रतिदर्श समष्टि है $S = (H, T)$ और $n(S) = 2$

अगर दो सिक्के उछाले जाते हैं तब प्रतिदर्श समष्टि दिया जाता है:

$$S = \{(H, T) \times (H, T)\} = \{HH, HT, TH, TT\}$$

और

तीन सिक्कों के उछाल में,

$$S = \{(H,T) \times (H,T) \times (H,T)\} = \{(HH, HT, TH, TT) \times (H,T)\}$$
$$= \{HHH, \cancel{HHH}, HTH, THH, \cancel{HHH}, TTH, HHT, HTT, THT, TTT\}$$

और $n(S) = 8 = 2^3$

सामान्यतः, n सिक्कों के यादृच्छया उछाल में, $n(S) = 2^N$

2. अगर दो सिक्के उछाले जाते हैं, तब प्रतिदर्श समष्टि में 36 बिन्दुएँ होती हैं। जैसा नीचे दिया गया है :-

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix} \; n(S) = 36 = 6^2$$

सामान्यतः, N पासों के यादृच्छया उछाल में, $n(S) = 6^N$

घटना (Event) :— एक यादृच्छिक प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि के सभी संभव निष्कर्ष, कुछ निष्कर्ष विशेष वर्णन को संतुष्ट करते हैं, जिसे हम घटना कहते हैं। उदाहरण के लिए, जैसा पहले ही चर्चा की गई है, 3 सिक्कों के उछाल में प्रतिदर्श समष्टि दी जाती है,

$$S = \{HHH, HTH, THH, TTH, HHT, HTT, THT, TTT\}$$
$$= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}, \text{ कहें} \quad (12.18)$$

जहाँ $w_1 = HHH$, $w_2 = HTH$, $w_3 = THH$, ... $w_8 = TTT$

इस प्रतिदर्श समष्टि के लिए हम बहुत सारी घटनाओं को परिभाषित कर सकते हैं, इनमें से कुछ नीचे दी जाती हैं :

E_1 : सभी चित्त (Heads) पाने की घटना $= \{HHH\} = \{w_1\}$

E_2 : ठीक दो चित्त पाने की घटना $= \{HTH, THH, HHT\} = \{w_2, w_3, w_5\}$

E_3 : कम से कम दो चित्त पाने की घटना

$$= \{w_1, w_2, w_3, w_5\} = \{w_1\} \cup \{w_2, w_3, w_5\} = E_1 \cup E_2$$

जहाँ E_1 और E_2 असंयुक्त (disjoint) हैं --- (*)

E_4 : ठीक एक चित्त पाने की घटना $= \{w_4, w_6, w_7\}$

E_5 : कम से कम एक चित्त पाने की घटना

$$= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\} = \{w_1, w_2, w_3, w_5\} \cup \{w_4, w_6, w_7\}$$
$$= E_3 \cup E_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_4$$

{जहाँ E_1, E_2 और E_4 असंयुक्त हैं।}

E_6 : सभी पट (tail) पाने की घटना $= \{TTT\} = \{w_8\}$

[illegible]

प्रायिकता – प्रायिकता की शास्त्रीय परिभाषा :– हम जानते हैं कि S एक प्रतिदर्श समष्टि है [illegible] प्रतिदर्श बिन्दुओं [illegible] $n(S) = N$. मान लो कि [illegible] की संख्या (प्रतिदर्श बिन्दु) घटना A के अनुकूल होती है $n(A)$ द्वारा तब प्रायिकता की शास्त्रीय व्याख्या देते हैं :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(A)}{N} \quad \text{------} \quad (12.21a)$$

परन्तु व्यावहारिक प्रश्नों में, S के अवयवों को गिनकर और फिर घटना के अनुकूल स्थितियों की गणना अधिकतर काफी जटिल होती है। उदाहरण के लिए, अगर एक पासा तीन बार उछाली जाती है, तब प्रतिदर्श बिन्दु की कुल संख्या होगी $6^3 = 216$ और एक ताश की गड्डी से अगर 3 पत्ते और प्रतिस्थापन के खींची जाती हैं ~~तब प्रतिदर्श बिन्दुओं~~ होंगी $52 \times 51 \times 50 = 132,600$ प्रतिदर्श बिन्दुओं। उन्हें गिनना काफी कठिन कार्य है और व्यावहारिक अनावश्यक होता है। यद्यपि, इन परिस्थितियों में प्रायिकता की गणना काफी सीमा तक सुगम की जा सकती है प्रायिकता के दो आधारभूत प्रमेयों द्वारा – योगात्मक प्रमेय और गुणन प्रमेय जो नीचे विवेचित की गई हैं।