[illegible] प्रयोग के [illegible] है, [illegible] की संख्या [illegible] $P(E_1)$ और $P(E_2)$ ज्ञात करें। [illegible] प्रायिकता [illegible] समप्रायिक है।

Eg: — प्रतिदर्श समष्टि [illegible] एक [illegible] सिक्के के तीन उछालने का [illegible] दिया जाता है : $\{H = [illegible]\}$

$$S = \{H, T\} \times \{H, T\} \times \{H, T\}$$
$$= \{H, T\} \times \{HH, \ldots\}$$
$$= \{HHH, HH\ldots, HTH, HTT, THH, \ldots\}$$

प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या [illegible] $n(S) = 8$ के द्वारा।

घटना E_1 : चित्तों की संख्या पटों की संख्या से अधिक [illegible] उछालने के [illegible] उछाल में [illegible] है कि हम कम से कम दो चित्त [illegible] i.e. दो चित्त और एक पट, या सभी तीनों ही चित्त [illegible] प्रतिदर्शी बिन्दुएँ हैं :

$$E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$ और

उसीतरह से, घटना E_2 : प्रथम परीक्षण में चित्त आता [illegible]

$$E_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$$

अगर हम परिकल्पना करें कि S के हर सभी समप्रायिक [illegible]

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{\ldots}$$

$$P(A\cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} \times \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = P(A)\cdot P(B/A) \quad [\ldots \text{ है}]$$

और $$P(A\cap B) = \frac{n(B)}{n(S)} \times \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = P(B)\cdot P(A/B) \quad [\ldots \text{ है}]$$

प्रायिकता ~~प्रमेय~~ के गुणन प्रमेय का सामान्यीकरण (Generalisation of Multiplication Theorem of Probability)

प्रायिकता के गुणन प्रमेय को दो से अधिक घटनाओं के लिए विस्तारित किया जा सकता है। इसलिए तीन घटनाएँ A_1, A_2 और A_3 के लिए, हमें

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2) \quad \text{---}(12.32)$$

सामान्य में, n घटनाओं $A_1, A_2, \ldots, A_n$ के लिए, हमें

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3 \cdots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1\cap A_2)\times \cdots \times P(A_n/A_1\cap A_2\cap \cdots \cap A_{n-1}) \quad \text{---}(12.32a)$$

स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events) :—

घटनाएँ एक दूसरे से स्वतंत्र कही जाती हैं अगर उनमें से किसी एक का घटित होना दूसरे से या दूसरे को घटित होने से प्रभावित नहीं करती हैं।

अगर A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं जैसा कि A के घटित होने या घटित नहीं होने की प्रायिकता प्रभावित नहीं होती है B के घटित या नहीं घटित होने से, तब हमें

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{और} \quad P(B/A) = P(B) \quad \text{---}(12.33)$$

स्वतंत्र घटनाओं के लिए गुणन प्रमेय {Multiplication Theorem for Independent Events}

दो घटनाएं A और B स्वतंत्र हैं सिर्फ और सिर्फ अगर,

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \quad \text{---}(12.34)$$

i.e. अगर दो घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता बराबर है उनके व्यक्तिगत प्रायिकता के गुणनफल के।

उपपत्ति (Proof) :→ दो घटनाओं A और B के लिए, हमें है

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B) \quad \text{---}(*)$$

अगर माना :— अगर A और B स्वतंत्र हैं, तब

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{और} \quad P(A/B) = P(A) \quad \text{---}(**)$$

(*) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

सिर्फ और सिर्फ अगर भाग :- अगर (12.34) है, तब (*) का प्रयोग

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{और} \quad P(A|B) = P(A)$$

$\Rightarrow$ A और B स्वतंत्र हैं

इसलिए, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ ---- (12.34)

दो घटनाओं A और B के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध (a necessary and sufficient condition) प्रदान करती है। इससे हमारा मतलब है कि अगर A और B स्वतंत्र घटनाएं तब (12.34) उपयुक्त है और व्युत्क्रम में, अगर (12.34) उपयुक्त है तब A और B स्वतंत्र घटनाएं हैं।

सामान्यीकरण (Generalisation) —

(12.34) में प्राप्त परिणाम को दो से अधिक घटनाओं के लिए सामान्य किया जा सकता है

n घटनाएं $A_1, A_2 \ldots A_n$ स्वतंत्र हैं सिर्फ और सिर्फ अगर

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\ldots P(A_n) \quad \text{---- (12.35)}$$

i.e. n घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता बराबर है उनके व्यक्तिगत घटने की प्रायिकता के गुणनफल का।

अब हम कुछ परिणाम देंगे प्रमेय के रूप में, जो बार-बार प्रयुक्त होंगी संख्यात्मक प्रश्नों को हल करने में।

प्रमेय 12.12. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ..... (12.36)

प्रमेय 12.13. (i) $P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$ ..... (12.37)

(ii) $P(A\cap \bar{B}) = P(A) - P(A\cap B)$ ..... (12.38)

टिप्पणी :- हम जानते हैं कि प्रत्येक घटना E के लिए, $P(E) \geq 0$. इसलिए (12.37) से, हम पाते हैं

$$P(B) - P(A\cap B) = P(\bar{A}\cap B) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) \leq P(B) \quad \text{---- (12.39)}$$

इसी तरह, 12.38 से, हम पाते हैं

$$P(A) - P(A\cap B) = P(A\cap \bar{B}) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) \leq P(A) \quad \text{---- (12.40)}$$

प्रमेय 12.14 — अगर $A \subset B$, तब $P(A) \leq P(B)$ ..... (12.41)

टिप्पणी :- चूंकि (12.39) और (12.40) में प्राप्त परिणाम द्वारा (12.41) से निम्नलिखित की आवश्यकता है क्योंकि $A\cap B \subset A$ और $A\cap B \subset B$

प्रमेय 12.15: अगर घटनाएँ A और B स्वतंत्र हैं तब घटनाएँ
(i) A और $\bar{B}$ स्वतंत्र हैं (ii) $\bar{A}$ और B स्वतंत्र हैं (iii) $\bar{A}$ और $\bar{B}$ स्वतंत्र हैं

प्रमेय 12.16. अगर $A_1, A_2 \ldots A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ हैं क्रमशः घटित होने की प्रायिकता $p_1, p_2 \ldots p_n$ के साथ, तब उनमें से कम से कम एक के घटित होने की प्रायिकता दी जाती है :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) \quad \text{-----} (12.42)$$

उपपत्ति :— हमें दिया गया है,

$$P(A_i) = p_i \implies P(\bar{A}_i) = 1 - p_i \quad \text{---} (i)$$

हम जानते हैं कि किसी घटना E के लिए, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ --- (ii)

(ii) में लेकर $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ में, हम पाते हैं

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c = 1$$

$$\implies P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = 1 \quad \text{-----} (12.43)$$

[डी-मॉर्गन के संपूरक नियम से, i.e. समुच्चयों के सम्मिलन का पूरक उनके संपूरक के प्रतिच्छेद के बराबर होती है]
[i.e. the Complement of the union of sets is equal to the intersection of their Complements]

$$\implies P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) \quad \text{----} (12.44)$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n)$$

मिश्रित प्रायिकता प्रमेय से, चूँकि $A_1, A_2 \ldots A_n$ और क्रमानुसार $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}_n$ स्वतंत्र हैं [c.f. प्रमेय 12.15], इसलिए (i) से प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$$

टिप्पणी :— (12.43) और (12.44) में प्राप्त परिणाम बहुत महत्वपूर्ण हैं और ज्यादातर संख्यात्मक प्रश्नों में प्रयुक्त होते हैं। परिणाम (12.43) शब्दों में अभिलिखित देती है:

P{ कम से कम एक घटना $A_1, A_2 \ldots A_n$ की घटित होना }

= 1 − P{ कोई भी घटना $A_1, A_2 \ldots A_n$ का नहीं घटित होना } --- (12.45)

या समरूपता से,

P{ दिया गया कोई भी घटना नहीं घटित होती है }

= 1 − P{ इनमें से कोई एक घटित होता है } ---(12.45a)

अब हम लोग संख्यात्मक प्रश्नों की चर्चा करेंगे, प्रायिकता के योगात्मक और गुणात्मक प्रमेय के प्रयोग का वर्णन करने के लिए।