(3) और (4) से, हम अवलोकित करते हैं कि प्रत्येक प्रतीपगमन गुणांक b_{yx} और b_{xy} का चिन्ह निर्भर करता है सहप्रसरण पद पर, चूंकि $\sigma_x > 0$ और $\sigma_y > 0$. अगर $Cov.(x,y)$ धनात्मक है, दोनों प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक हैं और अगर $Cov.(x,y)$ ऋणात्मक है, दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक हैं।

आगे, चूंकि $\sigma_x > 0$ और $\sigma_y > 0$, r, b_{yx} और b_{xy} के प्रत्येक का चिन्ह सहप्रसरण पद पर निर्भर करती है। अगर $Cov(x,y)$ धनात्मक है, सभी तीनों धनात्मक हैं और अगर $Cov(x,y)$ ऋणात्मक है, इनमें तीनों ऋणात्मक हैं। इस परिणाम को थोड़ी भिन्नता के साथ यहाँ भी वर्णित की जा सकती है।

सह-संबंध गुणांक का चिन्ह एक ही है जैसा प्रतीपगमन गुणांकों का। अगर प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक है, r धनात्मक है और अगर प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक हैं, r ऋणात्मक है।

9.4.1 प्रतीपगमन गुणांकों पर प्रमेय :

प्रमेय 9.1 : सह-संबंध गुणांक गुणोत्तर माध्य है प्रतीपगमन गुणांकों के बीच i.e.

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} \quad \text{------} \quad (9.33)$$

प्रमाण (Proof) :- हमें, $b_{yx} = \frac{Cov.(x,y)}{\sigma_x^2} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ --- (9.34)

$$\text{और } b_{xy} = \frac{Cov.(x,y)}{\sigma_y^2} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{---} \quad (9.35)$$

(9.34) और (9.35) को गुणा करने पर, हम पाते हैं

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} \Rightarrow r = \pm\sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}} \quad \text{---} \quad (9.36)$$

जो परिणाम को स्थापित करती है।

टिप्पणी :- वर्गमूल के पहले लिया जाने वाला चिन्ह वही है जो प्रतीपगमन गुणांकों का। अगर प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक हैं, हम (9.36) में धनात्मक चिन्ह लेते हैं और अगर प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक हैं, हम (9.36) में ऋणात्मक चिन्ह लेते हैं।

प्रमेय 9.2 : अगर प्रतीपगमन गुणांकों में से एक इकाई (एक) से बड़ी है, तो दूसरे को निश्चित रूप से एक से कम होना चाहिए।

प्रमेय 9.3 :- प्रतीपगमन गुणांकों का समांतर माध्य सह-संबंध गुणांक के मापांक से अधिक होता है,

i.e. $\frac{1}{2}[|b_{yx}| + |b_{xy}|] \geq |r|$

प्रमेय 9.4 :- प्रतीपगमन गुणांक मूलबिन्दु [illegible] है परन्तु मापक्रम से नहीं।

संकेत रूपों में, अगर हम x और y को नये चर u और v में रूपांतरित करें मूल-बिन्दु और मापक्रम के परिवर्तन [illegible] के द्वारा,

$$u = \frac{x-a}{h}, \quad v = \frac{y-b}{k}, \text{ जहाँ } a, b, h(>0) \text{ और } k(>0)$$

तब $b_{yx} = \frac{k}{h} b_{vu}$ और $b_{xy} = \frac{h}{k} \cdot b_{uv}$

विशेष रूप से अगर हम लें $h = k = 1$, i.e. x और y चर को रूपांतरित करें u और v में संबंध द्वारा ;

$$u = x - a \quad \text{और} \quad v = y - b \qquad (9.9)$$

i.e. सिर्फ मूल-बिन्दु के परिवर्तन द्वारा, हम (9.39) से पाते हैं

$$b_{xy} = b_{uv} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2} \quad (9.40a) \text{ और}$$

$$b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \quad (9.40b)$$

ये सूत्र बहुत उपयोगी हैं प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण प्राप्त करने में और आरम्भ मूल्य से और y भिन्न में पाते हैं या अगर x और y के मूल्य बड़े हैं।

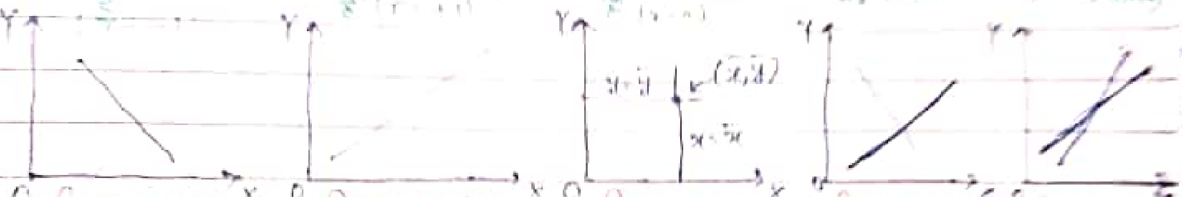
उदाहरण 9.1: निम्नलिखित आंकड़े से, दो प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त करें :

बिक्री :	91	92	108	121	67	124	51	73	111	57
खरीद :	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

हल : मान लें हमलोग बिक्री को चर x से और खरीद को चर y से सूचित करते हैं।

x	y	$dx = x - \bar{x}$	$dy = y - \bar{y}$	dx^2	dy^2	$dx\,dy$
91	71	1	1	1	1	1
92	75	7	5	49	25	35
108	69	18	-1	324	1	-18
121	97	31	27	961	729	837
67	70	-23	0	529	0	0
124	91	34	21	1156	441	714
51	39	-39	-31	1521	961	1209
73	61	-17	-9	289	81	153
111	80	21	+10	441	100	210
57	47	-33	-23	1089	529	759
[illegible]	$\Sigma y = 700$	$\Sigma dx = 0$	$\Sigma dy = 0$	$\Sigma dx^2 = 6360$	$\Sigma dy^2 = 2868$	$\Sigma dx\,dy = 3900$

[illegible]



चित्र 9.3 (a) चित्र 9.3 (b) चित्र 9.3 (c) चित्र 9.3 (d) चित्र 9.3 (e)

9.4. प्रतीपगमन का गुणांक (Coefficients of Regression)

हमलोग विचार करें y का x पर प्रतीपगमन की रेखा, viz.

$$y = a + bx$$

~~निर्देशांक~~ गुणांक 'b' जो ढाल है y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का ~~y पर~~ का y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक कहलाता है। यह निर्भर चर y के मान में वृद्धि दर्शाती है स्वतंत्र चर x के मान में इकाई परिवर्तन के लिए। दूसरे शब्दों में, यह y के परिवर्तन की दर x के सापेक्ष दर्शाती है। संकेताक्षरों की सुविधा के लिए, ढाल b जो y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक लिखी जाती है b_{yx} के द्वारा।

इसी तरह से x का y पर प्रतीपगमन समीकरण में, viz.

$$x = A + By\ .$$

... होता है।

इसलिए पूर्ण सह संबंध की स्थिति में, ($r = \pm 1$), दोनों प्रत...
की रेखायें संपाती होती हैं। इसलिए साधारण में, हमें होता दो प्र...
की रेखायें होती हैं सिर्फ खास स्थिति पूर्ण सह संबंध ($r = \pm 1$) को छो...
जब दोनों रेखायें संपाती होती हैं और हम सिर्फ एक रेखा पाते हैं।

9.3.3. प्रतीपगमन रेखाओं के बीच कोण

अगर θ न्यून कोण (acute angle) है दो प्रतीपगमन की रेखा... के बीच तब

$$\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left(\frac{1 - r^2}{|r|}\right)\right\} \quad \cdots\cdots (9.25)$$

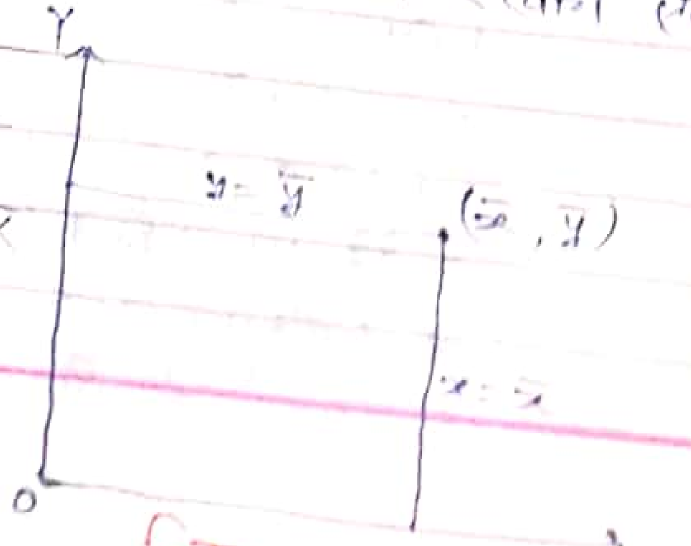
विशेष रूप से, अगर $r = \pm 1$ तब $\theta = \tan^{-1}(0) \Rightarrow \theta = 0$ या π
i.e. या तो दो रेखायें संपाती हैं ($\theta = 0$) या वे समानान्तर हैं ($\theta = \pi$)।
परन्तु चूंकि दोनों प्रतीपगमन की रेखायें बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ पर प्रतिच्छे...
करती हैं, वे समानान्तर नहीं हो सकते हैं। इसलिए पूर्ण सह संबंध की
, धनात्मक या ऋणात्मक, प्रतीपगमन की दोनों रेखायें संपाती हैं।

अगर $r = 0$, तब (9.25) से, $\theta = \tan^{-1}(\infty) = \pi/2$
i.e. अगर चर असह-संबंधित हैं, प्रतीपगमन की दोनों रेखायें एक
...र के लम्बवत हो जाती हैं।

टिप्पणियाँ 1. जब $r = 0$ i.e. जब ...
...y असह-संबंधित हैं, तब प्रतीपगमन
...यें y का x पर, और x का y पर
...दिये जाते हैं [(9.13) से और (9.24) से]

$y - \bar{y} = 0 \Rightarrow y = \bar{y}$

$x - \bar{x} = 0 \Rightarrow x = \bar{x}$



चित्र - 9.2 (a)

[illegible] y [illegible]

[illegible] और x का y पर प्रतीपगमन का गुणांक [illegible]

[illegible] लिखा जाता है b_{xy} ।

संकेतन (Notations)

b_{yx} = y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक

b_{xy} = x का y पर प्रतीपगमन का गुणांक

[illegible] है, y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया जाता है

$$b_{yx} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \quad [\because Cov(x, y) [illegible]$$

इसी तरह दिया है, x का y पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया जाता है,

$$b_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}$$

तदनुसार, y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}) \quad \text{------} \quad [illegible]$$

और x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}) \quad \text{------} \quad [illegible]$$

[illegible] 1: y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण [illegible] के लिए, और x का y पर, निम्नलिखित सूत्र [illegible] b_{yx} और b_{xy} के लिए बहुत सुविधाजनक हैं प्रयोग करने में

$$b_{yx} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma(x - \bar{x})^2} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad \text{------} \quad [illegible]$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma(y - \bar{y})^2} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \quad \text{------} \quad [illegible]$$

सूत्र (6.30) और (6.31) बहुत उपयोगी हैं प्रतीपगमन गुणांकों को [illegible] के लिए [illegible] के n बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2) … है।

इसका सुविधाजनक सूत्र प्रतीपगमन गुणांकों को ज्ञात करने को [illegible] हो सकती है [illegible] के लिए हैं :

$$b_{yx} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \text{ और } b_{xy} = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{------} \quad (6.32)$$

2. है यहाँ x और y के बीच सह-संबंध गुणांक x और y की [illegible] है, i.e. $r_{xy} = r_{yx}$ । यद्यपि, प्रतीपगमन गुणांक x का y [illegible] नहीं है, i.e. $b_{yx} \neq b_{xy}$

होने

[illegible]

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{900}{10} = 90$; और $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{700}{10} = 70$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} = \frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma dx^2} = \frac{3900}{6360} = 0.6132$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma dy^2} = \frac{3900}{2868} = 1.361$$

y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है

$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$

$\Rightarrow y - 70 = 0.6132(x - 90)$

$= 0.6132x - 55.188$

$\Rightarrow y = 0.6132x - 55.188 + 70.000$

$\Rightarrow y = 0.6132x + 14.812$

x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है

$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$

$\Rightarrow x - 90 = 1.361(y - 70)$

$= 1.361y - 95.27$

$\Rightarrow x = 1.361y - 95.27 + 90.00$

$\Rightarrow x = 1.361y - 5.27$

टिप्पणी :- हमें,

$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = 0.6132 \times 1.361 = 0.8346 \Rightarrow r = \pm\sqrt{.8346} = \pm 0.9135$

परन्तु, चूँकि, दोनों प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक है, r को निश्चित रूप से धनात्मक होना चाहिए। इसलिए $r = 0.9135$.

उदाहरण 9.2. :- नीचे दिये गये संक से ज्ञात करें :

(a) दो प्रतीपगमन गुणांक

(b) दो प्रतीपगमन समीकरण

(c) अर्थशास्त्र और सांख्यिकी में अंकों के बीच सह-संबंध का गुणांक

(d) सबसे संभावित अंक सांख्यिकी में जब अर्थशास्त्र में 30 अंक है।

अर्थशास्त्र में अंक :	25	28	35	32	31	36	29	38	34	32
सांख्यिकी में अंक :	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

हल :- मान लें अर्थशास्त्र में अंक को चर x से और सांख्यिकी में अंक को चर Y से द्योतित करें।

x	y	$dx = x - \bar{x} = x - 32$	$dy = y - \bar{y} = y - 38$	dx^2	dy^2	$dx\,dy$
25	43	-7	5	49	25	-35
28	46	-4	8	16	64	-32
35	49	3	11	9	121	+33
32	41	0	3	0	9	0
31	36	-1	-2	1	4	2
36	32	4	-6	16	36	-24
29	31	-3	-7	9	49	+21
38	30	6	-8	36	64	-48
34	33	2	-5	4	25	-10
32	39	1	1	0	1	+0
$\Sigma x = 320$		$\Sigma dx = 0$	$\Sigma dy = 0$	$\Sigma dx^2 = 140$	$\Sigma dy^2 = 398$	$\Sigma dx\,dy = -9$