9.4.1 प्रतीपगमन गुणांकों पर प्रमेय :

प्रमेय 9.1 : सह-संबंध गुणांक गुणोत्तर माध्य प्रतीपगमन गुणांकों के बीच i.e.

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} \quad \text{(9.33)}$$

प्रमाण (Proof) :- हमें, $b_{yx} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

और $b_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_y^2} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

(9.34) और (9.35) को गुणा करने पर, हम पाते हैं

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} \Rightarrow r = \pm\sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}}$$

जो परिणाम को स्थापित करती है।

टिप्पणी :- वर्गमूल के पहले लिया जाने वाला चिन्ह व प्रतीपगमन गुणांकों का। अगर प्रतीपगमन गुणांक धन (9.36) में धनात्मक चिन्ह लेते हैं और अगर प्रतीपग ऋणात्मक हैं, हम (9.36) में ऋणात्मक चिन्ह लेते हैं

प्रमेय 9.2. अगर प्रतीगमन गुणांकों में से एक से बड़ी है, तो दूसरे को निश्चित रूप से 1 से कम

प्रमेय 9.3 :- प्रतीपगमन गुणांकों के मापांक मूल माध्य सह संबंध गुणांक के मापांक मूल्य से अधि

i.e. $\frac{1}{2}\left[|b_{yx}| + |b_{xy}|\right] > |r|$

प्रमेय 9.9 :- प्रतीपगमन गुणांक मूलबिन्दु के परिवर्तन के [illegible] है परन्तु मापक्रम से नहीं।

संकेताक्षरों में, अगर हम x और y को क्रमशः u और v में रूपांतरित करें मूल-बिंदु और मापक्रम के परिवर्तन द्वारा, Viz.,

$$u = \frac{x-a}{h}, \quad v = \frac{y-b}{k}$$, जहाँ $a, b, h(>0)$ और $k(>0)$ नियत [illegible]

तब $b_{yx} = \frac{k}{h} b_{vu}$ और $b_{xy} = \frac{h}{k} \cdot b_{uv}$ ---- (9.39)

विशेष रूप से अगर हम लें $h = k = 1$, i.e. x और y चर को रूपांतरित करें u और v में संबंध द्वारा :

$$u = x - a \quad \text{और} \quad v = y - b \quad \text{---- (9.40)}$$

i.e. सिर्फ मूल-बिंदु के परिवर्तन द्वारा, तब (9.39) से हम पाते हैं

$$b_{xy} = b_{uv} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2} \quad \text{---- (9.40a)} \quad \text{और}$$

$$b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \quad \text{---- (9.40b)}$$

ये सूत्र बहुत उपयोगी हैं प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण प्राप्त करने में और माध्य मूल्य x और y भिन्न में आते हैं या अगर x और y के मूल्य बड़े हैं।

उदाहरण – 9.1. निम्नलिखित सांख्यिकी से, दो प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त करें :

बिक्री :	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
खरीद :	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

हल : मान लें हमलोग बिक्री को चर x से और खरीद को चर y से द्योतित करते हैं :

x	y	$dx = x - \bar{x}$	$dy = y - \bar{y}$	dx^2	dy^2	$dx\,dy$
91	71	1	1	1	1	1
97	75	7	5	49	25	35
108	69	18	-1	324	1	-18
121	97	31	27	961	729	837
67	70	-23	0	529	0	0
124	91	34	21	1156	441	714

यहाँ, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{320}{10} = 32$ और $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{380}{10} =$

(a) प्रतीपगमन गुणांक :

y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया जाता है :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} = \frac{\Sigma dx\, dy}{\Sigma dx^2} =$$

इसी तरह से, x का y पर प्रतीपगमन का गुणांक है :

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{\Sigma dx\, dy}{\Sigma dy^2} = \frac{-[illegible]}{[illegible]} =$$

(b)

x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है :

$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$

$\Rightarrow x - 32 = -0.2337(y - 38)$

$= -0.2337y + 0.2337 \times 38$

$= -0.2337y + 8.8806$

$\Rightarrow x = -0.2337y + 32 + 8.8806$

$\Rightarrow x = -0.2337y + 40.8806$

y का x पर प्रतीपगमन की रेखा

$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$

$\Rightarrow y - 38 = -0.6643(x$

$\Rightarrow y = -0.6643x + 38 - 0$

$= -0.6643x + 38 +$

$\Rightarrow y = -0.6643x + 59.257$

(c) सह-संबंध गुणांक : हमें,

$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = (-0.6643) \times (-0.2337) = 0.1552 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0.1}$

चूँकि दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक हैं, r को निश्चित रूप से ऋ होना चाहिए। इसलिए, धनात्मक चिह्न को छोड़ते हुए, हम पाते हैं :

$r = -0.394$

(d) सांख्यिकी (y) में सबसे संभावित अंक को प्राक्कलित करने के लि जब अर्थशास्त्र (x) में अंक 30 है, हमलोग y का x पर प्रतीपगमन में का प्रयोग करेंगे Vइ., समीकरण (*). x = 30 लेकर, वांछित अं दी जाती है :

$y = -0.6643 \times 30 + 59.2576 = -19.929 + 59.2576$

$= 39.3286$

इसलिए, सांख्यिकी में सबसे संभावित अंक है जब अर्थशास्त्र में अंक 30 है,

$39.3286 \simeq 39$

उदाहरण 9.3 : A और B ...